

ҚАХАРМАН НҮРБЕК

ОБЩИЕ РЕГУЛЯРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности «6D060100-Математика»

Актуальность темы исследования. В современной теории дифференциальных уравнений с частными производными важное место занимают исследования вырождающихся гиперболических и эллиптических уравнений, а так же уравнений смешанного типа. Повышенный интерес к этому классу уравнений объясняется как большой теоретической значимостью полученных результатов, так и их многочисленными приложениями в газовой динамике, гидродинамике, в теории бесконечно малых изгибаний поверхности, в безмоментной теории оболочек, в различных разделах механики сплошных сред, акустике, в теории электронного рассеяния и во многих других областях знаний. Развитие современной науки показало, что вырождающиеся уравнения являются хорошей моделью реальных физических и биологических процессов. А это обусловило актуальность постановки и решения для них различных краевых задач, которые в настоящее время являются предметом фундаментальных исследований многих математиков.

После фундаментальных работ Ф. Трикоми и С. Геллерштедта важные результаты изучения дифференциальных уравнений рассматриваемого типа были приведены в известных монографиях А. В. Бицадзе и М. М. Смирнова.

Решение основной краевой задачи Трикоми и других краевых задач проводилось методами сложных сингулярных интегральных уравнений. Поэтому ставилась проблема найти корректную краевую задачу, которая решается проще и с помощью которой решаются другие краевые задачи.

Многообразие корректных краевых задач в областях, содержащихся в характеристическом конусе гораздо шире, чем в стандартной смешанной цилиндрической области, но решение их удается найти только для узкого класса уравнений.

При исследовании смешанной задачи Коши в цилиндрической области боковые граничные условия как правило были локальными граничными условиями типа Дирихле, либо периодическими граничными условиями.

В работе Кальменова Т.Ш., Сураган Д. впервые найдено граничное условие Ньютонового (объемного) потенциала, которое является новым интегро-дифференциальным самосопряженным граничным условием для уравнения Лапласа. Представляет интерес исследование решения смешанной задачи Коши для нехарактеристических вырождающихся гиперболических уравнений, налагаемых этим граничным условием.

Вырождающиеся гиперболические уравнения обладают той особенностью, что не всегда имеет место корректность задачи Коши. Задача Коши в обычной постановке может оказаться неразрешимой, если гиперболическое уравнение вырождается вдоль линии, являющейся одновременно характеристикой (огибающая семейства характеристик), или коэффициенты гиперболического уравнения при младших членах сингулярны. Поэтому естественно рассматривать «видоизмененную» задачу Коши, когда начальные условия на линии параболического вырождения задаются с весовыми функциями.

Актуальность выбранной темы исследования подтверждается стремительным развитием исследований в данном направлении, а также включением в авторитетные международные базы данных (Web of Science, Scopus, MathSciNet и другие) многочисленных публикации по выраждающим дифференциальным уравнениям.

Цель диссертационной работы. Нахождение решения смешанной задачи Коши для нехарактеристических вырождающихся гиперболических уравнений в классическом пространстве Соболева и нахождение общих регулярных граничных условий для обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся аналогами вырождающихся гиперболических уравнений..

Для достижения цели диссертационной работы рассмотрены следующие **основные задачи исследования:**

- нахождение общего граничного условия для обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся аналогами вырождающихся гиперболических уравнений;
- Рассмотрение задачи Коши, где начальные условия заданы весовыми функциями, с использованием граничного условия ньютоновского (объемного) потенциала для гиперболического уравнения типа Эйлера-Пуассона-Дарбу;
- Смешанная задача Коши для одного класса нехарактеристических вырождающихся гиперболических уравнений: 1) смешанная задача Коши с боковым граничным условием для нехарактеристических

вырождающихся гиперболических уравнений в случае $a(t) \equiv b(t) \equiv 0$;
2) Изучение общий случай задачи Коши.

Объект исследования. Исследование смешанной задачи Коши для нехарактеристических вырождающихся гиперболических уравнений с использованием краевого условия потенциала Ньютона, исследование видоизмененную задачу Коши для гиперболического уравнения типа Эйлера-Пуассона-Дарбу и нахождение общих регулярных краевых задач для вырождающихся обычных дифференциальных уравнений с использованием теории регулярного расширения минимальных операторов.

Методы научного исследования. Для проведения исследований по этой теме наряду с новыми идеями в математике используются простые и самостоятельно выводимые дифференциальные уравнения, методы теории математической физики. Также мы рекомендуем создавать и использовать новые методы авторских исследований на основе наших результатов.

Научная новизна работы. В данной работе пользуясь граничное условие Ньютонового (объемного) потенциала исследуется смешанная задача Коши для одного класса нехарактеристически вырождающихся гиперболических уравнений. В отличие от других работ посвященных данной тематике, где решения рассматриваемых задач, как правило, получены в весовых пространствах, в данной диссертационной работе решение получено в классических пространствах Соболева, в том числе для главной части уравнения.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Тема исследования носит преимущественно теоретический и фундаментальный характер. Поэтому научная значимость работы связана с использованием глубоких, современных результатов теории корректности начально-краевых задач и созданием новых собственных методов исследования и анализа.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 6 работ, в том числе 3 публикации в рейтинговых научных журналах, индексируемый в базе данных Web of Science и Scopus, 3 публикации в научных изданиях, входящих в перечень рекомендованные Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных научных результатов научной деятельности. Результаты по теме диссертации были опубликованы в следующих работах:

Публикация в рейтинговом научном журнале

1 Kakharman N., Kal'menov T., Mixed Cauchy problem with lateral boundary condition for noncharacteristic degenerate hyperbolic equations. *Boundary Value Problems*. 1 (2022): 1-11. (Web of Science Impact factor=1,7(Q1), Scopus SJR=0,573 (Q1), CiteScore=3,5, Scopus Percentile=92).

2 Kakharman N., Otelbaev M., Solution estimates for one class of elliptic and parabolic nonlinear equations. *Complex Variables and Elliptic Equations*. (2022): 1-10. (Web of Science Impact factor=0.765(Q3), Scopus SJR=0,454 , CiteScore=1.6; Scopus Percentile=51).

3 Kakharman N., Tulenov K. and Zhumanova L., On hyponormal and dissipative correct extensions and restrictions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2022, 45(16), pp. 9049–9060. (Web of Science Impact factor=3.007(Q1), Scopus SJR=0,702 (Q1), CiteScore=3,9; Scopus Percentile=91).

ККСОН

1 Кальменов Т.Ш., Кахарман Н. Об одной задаче Бицадзе-Самарского для уравнения Штурма-Лиувилля. *Математический Журнал*. 2018. Т18, №1. С. 88-98.

2 Kal'menov T. Sh., Kakharman N., Sadybekov M.A., About root functions of periodic Sturm-Liouville problem, *Kazakh Mathematical Journal*. 2019, V: 19:1, pp 31-38;

3 Kal'menov T.Sh., Kakharman N., On the completeness of root vectors of regular boundary value problems for one-dimensional differential operators. *Kazakh Mathematical Journal*. 2020. V.20:2. pp. 73-84.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов, заключение и списка использованных источников. Общий объем диссертации составляет 77 страниц. Список литератур состоит из 55 наименований.

Основное содержание диссертации. В первой главе работы используя абстрактную теорему теории расширения и сужения, находим общее регулярное краевое условие для одномерных аналогов вырождающихся дифференциальных уравнений первого порядка.

Далее во второй главе изучалась задача об общем регулярном краевом условии дифференциальных уравнений второго порядка. Найдено общее граничное условие для слабо вырождающихся уравнений. Во-первых, рассмотрим задачи Коши с граничным условием Ньютоновского (объемного) потенциала для уравнение

$$Lu = \frac{\partial}{\partial t} \left(t^\beta \frac{\partial}{\partial t} u \right) - \Delta_x u = f(x, t)$$

Известно, что это уравнение можно свести к уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Последняя третья глава: рассмотрим смешанную задачу Коши для класса нехарактеристических вырождающихся гиперболических уравнений с

использованием ньютоновского (объемного) потенциального граничного условия

$$Lu = u_{tt} - k(t)\Delta_x u + b(t)\frac{\partial u}{\partial t} + a(t)u = f(x, t),$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

$$N[u] \equiv -\frac{u(x, t)}{2} + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_\xi}(x, \xi) \cdot u(\xi, t) - \varepsilon(x, \xi) \cdot \frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi, t) \right) d\xi = 0, \\ 0 < t < T, \quad x \in \partial\Omega,$$

где $k \in C^{1+\alpha}[0, T]$, $0 < \alpha < 1$, $k(t) > 0$, $t > 0$, $k(0) = 0$, $k'(t) \geq 0$, и $\varepsilon(x, \xi)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа.

В отличие от других работ, посвященных данной тематике, где решения рассматриваемых задач, как правило, получены в весовых пространствах, в данной работе решение получено в классических пространствах Соболева, в том числе для главной части уравнения.

В заключительной части мы подводим итоги, полученные в ходе исследования, и предлагаем направления для дальнейшего развития.